数理解析研究所講究録
35巻 1967年 95-102

Resolvent density の Feller 型分解と対応する Dirichlet space の直和分解

東京教育大学　福島 正俊

§1. Resolvent density と Dirichlet space

D を R^N の任意の有界領域とする。

関数 $G_\alpha(x, y)$, $\alpha > 0$, $x, y \in D$, $x \neq y$ が D 上の resolvent density であるとは

$G_\alpha(x, y) \geqq 0$, $\quad \alpha \int_D G_\alpha(x, y) dy \leqq 1$,

$G_\alpha(x, y) - G_\beta(x, y) + (\alpha - \beta) \int_D G_\alpha(x, z) G_\beta(z, y) dz = 0$

が満されることとする。

対称な Resolvent density $G_\alpha(x, y)$ に対し

(1.1) $\qquad G_\alpha f(x) = \int_D G_\alpha(x, y) f(y) dy$, $\quad f \in L^2(D)$

とおくと (1.1) は $L^2(D)$ 上の norm $\leqq \frac{1}{\alpha}$ の有界線型作用素 G_α を定義する。 G_α は non-negative definite である。実際 resolvent 方程式より

$\forall f$, $\frac{\partial}{\partial \alpha}(G_\alpha f, f)_D = -(G_\alpha^2 f, f)_D = -(G_\alpha f, G_\alpha f)_D$

$\leqq 0$ 且つ $|(G_\alpha f, f)_D| \leqq \frac{1}{\alpha}(f, f)_D \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 0$

であるから $(G_\alpha f, f)_D \geqq 0$.

次に $f \in L^2(D)$ に対し

(1.2) $\mathcal{E}^\alpha_\beta(f,f) = \beta(f - \beta G_{\beta+\alpha} f,\ f)_D$

(1.3) $T^\alpha_\beta(f,f) = (f - \beta G_{\beta+\alpha} f,\ f - \beta G_{\beta+\alpha} f)_D$

とおくと resolvent equation より容易に

(1.4) $\frac{\partial}{\partial\beta} \mathcal{E}^\alpha_\beta(f,f) = T^\alpha_\beta(f,f) \geq 0 \quad ,\beta>0$

(1.5) $\frac{\partial}{\partial\beta} \mathcal{E}^\alpha_\beta(f,f) \leqq 0 \quad ,\ \beta>0$

が従う。

<u>定義 1.</u> $f \in L^2(D)$ に対し

(1.6) $\mathcal{E}(f,f) = \lim_{\beta\to+\infty} \mathcal{E}^0_\beta(f,f)$,

(1.7) $\mathcal{F} = \{ f \in L^2(D)\ ;\ \mathcal{E}(f,f) < +\infty \}$

とおく。 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}(\ ,\ ))$ を対称な resolvent density $G_\alpha(x,y)$ に対応する Dirichlet space という。

$f, g \in \mathcal{F}$ に対し 更に

(1.8) $\mathcal{E}^\alpha(f,g) = \mathcal{E}(f,g) + \alpha(f,g)_D$ とおく。

次の定理が成立つ。

<u>定理 1.</u>

(i) $f \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{E}^\alpha(f,f) = \lim_{\beta\to+\infty} \mathcal{E}^\alpha_\beta(f,f)$, $\alpha>0$.

(ii) $\mathcal{F}$ は内積 $\mathcal{E}^\alpha(\ ,\ )$ に関し real Hilbertian.

(iii) $f \in \mathcal{F}$ に対し $\alpha G_\alpha f \xrightarrow[\alpha\to+\infty]{} f$ strongly in $L^2(D)$

(iv) $G_\alpha(L^2(D)) \subset \mathcal{F}$ 且つ $f \in L^2(D)$ に対し

(1.8) $\mathcal{E}^\alpha(G_\alpha f, g) = (f, g)_D$, $\forall g \in \mathcal{F}$.

(v) $\mathbb{B}(D)$ を D 上の可界可測関数とする。

$\mathcal{R} = G_\alpha(\mathbb{B}(D))$ とおく。 $\mathcal{R}$ は α に無関係である が $\mathcal{R}$ は $\mathcal{F}$ の中で dense (w.r.to metric $\mathcal{E}^\alpha(\ ,\ )$ 但し $\alpha > 0$ は任意に固定)。

(vi) $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ には全ての normal contraction が operate する: 即ち $|f(x)| \leq |g(x)|$, $\forall x \in D$ $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$, $\forall x, y \in D$ 且つ $g \in \mathcal{F}$ と仮定すると $f \in \mathcal{F}$ で $\mathcal{E}(f,f) \leq \mathcal{E}(g,g)$ が成立つ。

定理1 (iii) は (1.4) (1.5) から従がう。(iv) の証明には (iii) を使う。(v) は (iv) から従がう。(vi) は定義 (1.7) より従がう。

D 上の吸収壁 Brown 運動の resolvent density を $G_D^\alpha(x, y)$ で表わす。 $G_D^\alpha(x, y)$ は対称である。

(1.9) $\widetilde{BLD} = \{f \in L^2(D),\ \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(D),\ i = 1, 2 \cdots, n$

f は capacity zero の集合の外で fine continuous$\}$ とおく。 但し $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は distribution の意味で

の微分。 $f \in BLD$ に対し

(1.10) $\quad (f,f)_{D,1} = \sum_{i=1}^{N} \int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^2(x)\,dx$

とおく。 $C_0^\infty(D)$ を無限回可微分で台 compact な関数全体とするとき

(1.11) $\quad BLD_0 = \overline{C_0^\infty(D)}$

とおく。但し closure は $(\ ,\ )_{D,1}$ に関して取る。次の定理が成立つ。

<u>定理 2.</u> $G_\alpha^0(x,y)$ に対応する Dirichlet space を $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)}(\ ,\ ))$ とすると、空間 $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ は空間 $(BLD_0, (\ ,\ )_{D,1})$ と一致する。

§2. Resolvent density の Feller 型分解

対称な resolvent density に次の条件を課す。

(G.a) $\quad G_\alpha(x,y) = G_\alpha^0(x,y) + R_\alpha(x,y)$

と書け、 $R_\alpha(x,y)$ は非負で x に関して α-harmonic $\left((\alpha - \frac{1}{2}\Delta_x) R_\alpha(x,y) = 0 \right)$.

(G.b) $\quad D$ の任意の compact subset K に対し

$$\sup_{x \in K,\, y \in D} R_\alpha(x,y) < +\infty .$$

M を D の Martin 境界、$K(x,\xi)$, $x\in D$, $\xi\in M$ を Martin-K-function, μ を M 上への (D の固定点からの) harmonic measure とする。 $\alpha>0$ に対して

(2.1) $$K_\alpha(x,\xi) = K(x,\xi) - \alpha\int_D G_\alpha^0(x,y)K(y,\xi)\,dy$$

とおく。 更に $\alpha>0$, ξ, $\eta \in M$ に対し

(2.2) $$U_\alpha(\xi,\eta) = \alpha\int_D K(x,\xi)K_\alpha(x,\eta)\,dx$$

とおき、 M 上の関数 φ, ψ に対して

(2.3) $$(\varphi,\psi)'_M = \int_M \varphi(\xi)\psi(\xi)\left(\int_M U_1(\xi,\eta)\mu(d\eta)\right)\mu(d\xi)$$

とする。 $\varphi \in L^2(M)' = \{\varphi \,;\, (\varphi,\varphi)'_M < +\infty\}$ に対し

(2.4) $$H_\alpha\varphi(x) = \int_M K_\alpha(x,\xi)\varphi(\xi)\mu(d\xi) = H_\alpha^x\varphi$$

とし

(2.5) $$\hat{H}_\alpha^x(\xi) = K_\alpha(x,\xi) \Big/ \int_M U_1(\xi,\eta)\mu(d\eta)$$

によって

(2.6) $$\hat{H}_\alpha^x f(\xi) = \int_D \hat{H}_\alpha^x(\xi) f(x)\,dx$$

なる operator を定義する。 $\hat{H}_\alpha^x$ は $\mathbb{B}(D)$ から $\mathbb{B}(M)$ への有界作用素であり

(2.7) $$H_\alpha\varphi(x) = (\hat{H}_\alpha^x, \varphi)'_M \quad , \quad \varphi \in L^2(M)'$$

なる等式が成立つ.

<u>定理 3.</u> $G_\alpha(x,y) = G^0_\alpha(x,y) + R_\alpha(x,y)$ を (G.a) (G.b) を満す対称な resolvent density とする. このとき $\exists\, \tilde{R}^\alpha$: $\mathbb{B}(M)$ 上の有界作用素 such that $\forall x, y \in D$, $\alpha > 0$,

$$(2.8) \quad R_\alpha(x,y) = H^x_\alpha \tilde{R}^\alpha \hat{H}^y_\alpha ,$$

且つ

$$(2.9) \quad \lim_{\alpha \to +\infty} (1_M, \tilde{R}^\alpha 1_M)'_M = 0 .$$

但し 1_M は M 上で恒等的に 1 に等しい関数.

§3. Dirichlet space の直和分解.

$G_\alpha(x,y)$ を (G.a) (G.b) を満す対称な resolvent density とする. $G_\alpha(x,y)$ に対応する Dirichlet space を $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ とする. $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ を定理2のそれとする. このとき

<u>定理 4.</u>

(i) $\mathcal{F}^{(0)} \subset \mathcal{F}$ 且つ

$$\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}^{(0)}(u,u) \quad \text{for} \quad u \in \mathcal{F}^{(0)}.$$

(ii) 各 $\alpha > 0$ につき, 空間 $(\mathcal{F}, \mathcal{E}^\alpha)$ は 次の

様に直和分解される．

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^{(0)} \oplus \mathcal{H}_\alpha$$

但し　$\mathcal{H}_\alpha$　は　$R_\alpha(\mathbb{B}(D))$ の二つ意味の中での closure．

定理4の証明のためには，定理1を考慮に入れると，次の補題を示せば充分である．

<u>補題</u>．　$\mathcal{F}^* = G_\alpha^0(\mathbb{B}(D))$，$\mathcal{H}_\alpha^* = R_\alpha(\mathbb{B}(D))$ とおく．

(i)　$\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ 且つ $\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}^{(0)}(u,u)$ for $u \in \mathcal{F}^*$．

(ii)　$\mathcal{F}^* \perp \mathcal{H}_\alpha^*$　w.r.to　$\mathcal{E}^\alpha(\ ,\ )$．

この補題は定理3を使って次の様に証明出来る．

<u>補題の証明</u>．　(i)　$u = G_1^0 f$，$f \in \mathbb{B}(D)$ とすると　$\mathcal{E}_\beta^0(u,u) = \mathcal{E}_\beta^{(0),0}(u,u) - \beta^2(R_\beta u, u)_D$．

ところが　定理1より

$$\beta^2(R_\beta u, u)_D = \beta^2(H_\beta \tilde{R}^\beta(\hat{H}_\beta G_1^0 f), G_1^0 f)_D$$

$$= \beta^2(\tilde{R}^\beta(\hat{H}_\beta G_1^0 f), \hat{H}_\beta G_1^0 f)'_M = \frac{\beta^2}{(\beta-1)^2}(\tilde{R}^\beta \varphi_\beta, \varphi_\beta)'_M$$

$$\xrightarrow[\beta \to +\infty]{} 0,$$　ここに　$\varphi_\beta = (\hat{H}_1 - \hat{H}_\beta) f$．

(ii) $f, g \in \mathcal{B}(D)$ とする。簡単な計算と上の(i)の結果より

$$\mathcal{E}^{\alpha}(G_\alpha^0 f, R_\alpha g) = \lim_{\beta \to +\infty} \beta(g, R_{\beta+\alpha} G_\alpha^0 f)_D$$

がわかる。再び定理3を使い、

$$\beta(g, R_{\beta+\alpha} G_\alpha^0 f)_D = (\hat{H}_\alpha g, \tilde{R}^{\beta+\alpha}(\hat{H}_\alpha - \hat{H}_{\beta+\alpha}) f)'_M$$

$$\leqq (1_M, \tilde{R}^{\beta+\alpha} 1_M)'_M \sup_{\xi \in M} |\hat{H}_\alpha g(\xi)| \cdot \sup_{\xi \in M} |\hat{H}_\alpha |f|(\xi)|$$

$$\xrightarrow[\beta \to +\infty]{} 0 .$$